5ο φυλλάδιο ασκήσεων-Πραγματική Ανάλυση
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Χρήστος Σαρόγλου

1. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq C(X)$. Η άλγεβρα που παράγεται από το σύνολο A ορίζεται να είναι η μικρότερη άλγεβρα συναρτήσεων που περιέχει το A. Ισοδύναμα, ορίζεται ως η τομή όλων των αλγεβρών συναρτήσεων που περιέχουν το A. Έστω ότι $A = \{f_1, \dots, f_N\}$, όπου $N \in \mathbb{N}$. Αν $\mathcal{P}_N$ είναι η οικογένεια όλων των πολυωνύμων N μεταβλητών με πραγματικούς συντελεστές, να δειχθεί ότι

$$\mathcal{A} = \{P(f_1, \dots, f_N) : P \in \mathcal{P}_N\}.$$

2. Έστω V ο γραμμικός χώρος που παράγεται από τις συναρτήσεις $1, \sin x, \sin^2 x, \dots, \sin^n x, \dots$, ορισμένες στο $[0, 1]$. Να δειχθεί ότι ο V είναι μία άλγεβρα συναρτήσεων και ότι $\overline{V} = C([0, 1])$.

3. Αν (X, d) είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, να δειχθεί ότι ο $C(X)$ (με την ομοιόμορφη μετρική) είναι διαχωρίσιμος.

[Υπόδειξη: Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Αν $f_n(x) = d(x_n, x)$, τότε η άλγεβρα που παράγεται από τις συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots$ είναι πυκνή στον $C(X)$.]

4. Να δειχθεί ότι η άλγεβρα που παράγεται από τις συναρτήσεις $1, x^2$ είναι πυκνή στον $C([0, 1])$ αλλά όχι στον $C([-1, 1])$.

[Υπόδειξη: Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1.]